

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)



搜索

[找找看](#)

[谷歌搜索](#)

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457199
排名 - 1199

多变量微积分笔记17——通量

在流体运动中，通量是单位时间内流经某单位面积的某属性量，是表示某属性量输送强度的物理量。在大气科学中，包含动量通量、热通量、物质通量和水通量。

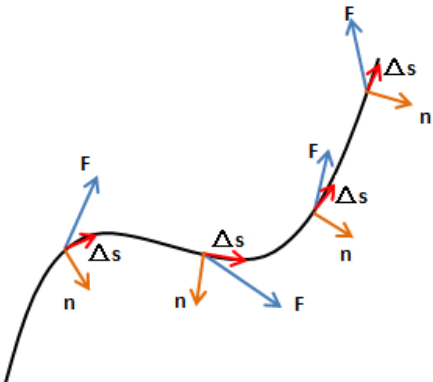
本章关于向量和点积的相关知识请参考《[线性代数笔记3——向量2（点积）](#)》。

通量

通量实际上是一种线积分。如果有一条平面曲线C和这个平面上的向量场F，通量用符号表示就是：

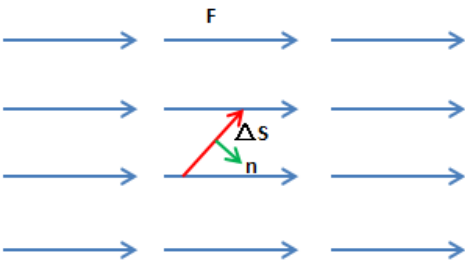
$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds$$

其中ds是曲线C的微元，n是垂直于ds的单位法向量（按C的方向顺时针旋转90°）：



如果把F看成是一个流速场，比如水流正在以某种速度流动，那么F解释了在平面上每一点的水流流动情况。处于F中的曲线C的通量度量了单位时间内有多少流体流过曲线C。可以将F看成河流，C是位于河中的渔网，通量可以计算单位时间内有多少河水流过了渔网。

如下图所示，ΔS是匀速场中曲线的一小段：



在单位时间后，通过ΔS的水流将是一个平行四边形：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

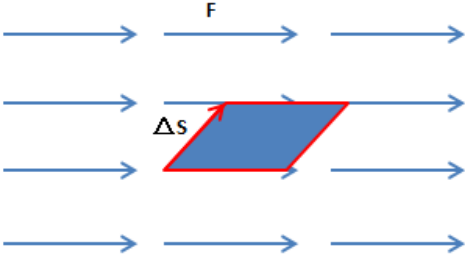
- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



已知平行四边形的一边 ΔS ，另一边由 F 表示，如果用 ΔS 作底，那么平行四边形的面积：

$$Area = \Delta S Height = \Delta S(\vec{F} \cdot \hat{n})$$

如果流体不是匀速的，需要取足够小的单位时间。将所有流过 ΔS 的水流做积分，就是单位时间内通过C的水流的净流量，即C的通量。如果流体从左到右通过C，通量取正值；反之取负值。

对比线积分的定义，

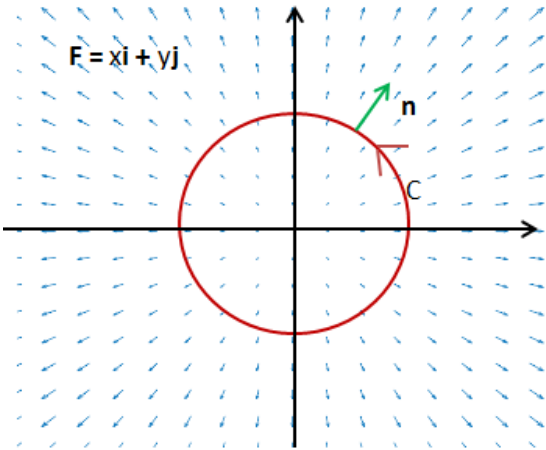
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \hat{T} ds$$

在线积分中， F 与 T 的点积表示 F 在 T 方向的分量， T 与 ds 同向，线积分度量的是在场中沿曲线前进 F 做的功，或者说克服 F 做了多少功；在通量中， F 与 n 的点积表示 F 在 n 方向的分向量， n 与 ds 垂直，通量度量的是有多少向量场会通过曲线，正负号表示通量的方向。

通量的计算

几何方法

如下图所示，曲线C是半径为a，圆心在原点的圆，求C在场中的通量。



$$F//n \Rightarrow F \cdot n = |F||n|\cos 0 = |F| = \sqrt{x^2 + y^2} = a$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = a \int_C ds = 2\pi a^2$$

如果C在 $F = -yi + xj$ 中，则 $n \perp F$ ，二者的点积是0，通量也是0，因为水流绕着C流动，并没有流过C。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

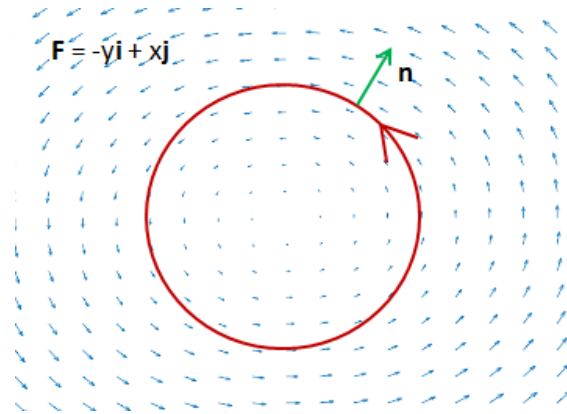
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



线积分法

我们将上一节的计算方法称为几何法，这对简单的通量很有效，但事实上曲线C往往很复杂，这就需要一种常规的方法。既然通量的表达式与线积分相似，就可以尝试用线积分计算通量。

在线积分中：

$$d\vec{r} = \hat{T}ds = \langle dx, dy \rangle$$

$\hat{T}$ 是ds同向的单位向量。对比通量， $\hat{n}$ 是ds的法向量（将 $\hat{T}$ 顺时针旋转90°），所以：

$$\hat{n}ds = \langle dy, -dx \rangle$$

现在可以总结通量的计算公式，如果向量场 $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ ：

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{n}ds = \int_C \langle M, N \rangle \cdot \langle dy, -dx \rangle = \int_C Mdy - Ndx$$

在物理解释上，通量和线积分描述了不同的度量，但是在计算上，二者没有什么实质性区别。

格林公式

如果是在处处有定义且处处可导的平面向量场 $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ 中求逆时针方向闭合曲线C的通量，就可以和线积分一样，使用格林公式。

$$\vec{F} = \langle M, N \rangle$$

$$\oint_C Mdy - Ndx = \iint_R (M_x + N_y) dA$$

与上一篇的线积分不同，通量是求 $\mathbf{F}$ 在ds法向量方向分量的积分，所以上面的公式也被称为格林公式的正交形式，它是格林公式的另一种表达。

公式的证明

$$\text{if } \vec{F} = \langle P, Q \rangle, \quad \text{let } -Q = M, P = N$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \oint_C P dy - Q dx = \oint_C M dx + N dy = \iint_R (N_x - M_y) dA$$

$$N_x = P_x, -M_y = Q_y, \quad \text{so}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_R (P_x + Q_y) dA$$

散度

$$\vec{F} = \langle M, N \rangle, \quad \text{div}(\vec{F}) = N_x + M_y$$

这里的 $\text{div}(\mathbf{F})$ 就是散度，它度量的是流体的发散程度。现在，格林公式可以写成：

$$\oint_C (M dy - N dx) = \iint_R \underbrace{\text{div}(\vec{F})}_{\text{散度}} dA = \iint_R (M_x + N_y) dA$$

$$\oint_C (M dx + N dy) = \iint_R \underbrace{\text{curl}(\vec{F})}_{\text{旋度}} dA = \iint_R (N_x - M_y) dA$$

示例

曲线C是逆时针方向半径为a的圆，求C在场 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ 中的通量。

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y = 2$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_R \text{div}(\vec{F}) dA = 2 \iint_R dA = 2 \text{Area}(R) = 2\pi a^2$$

综合示例

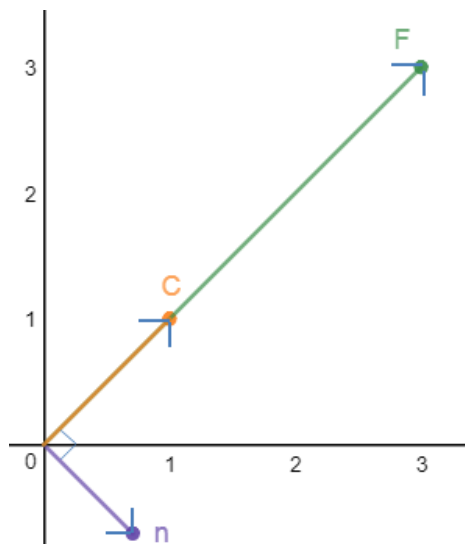
示例1

计算通量

a) $\mathbf{F} = 3\langle 1, 1 \rangle$, C from (0,0) to (1,1)

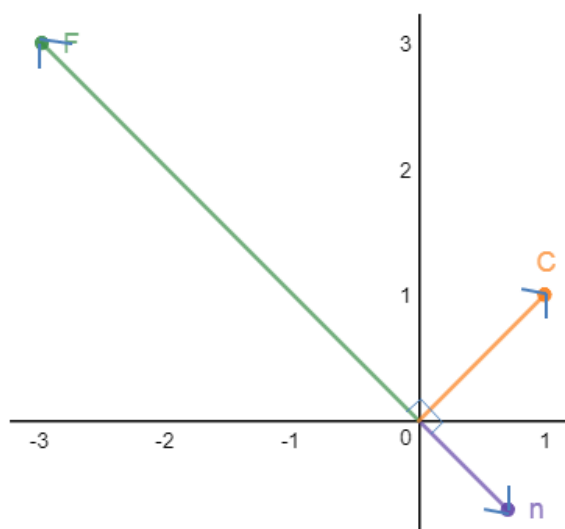
a) $\mathbf{F} = 3\langle -1, 1 \rangle$, C from (0,0) to (1,1)

a)



$$\hat{n} \perp \vec{F} \Rightarrow \vec{F} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = 0$$

b)

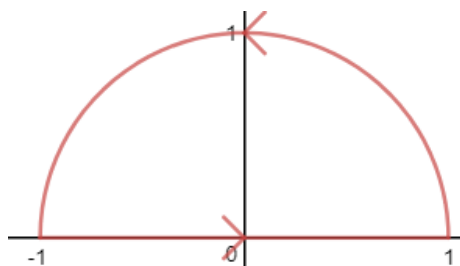


$$\hat{n} \perp \vec{F} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = |\vec{F}| |\vec{n}| \cos 180^\circ = -|\vec{F}| = -3\sqrt{2}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = -3\sqrt{2} \int_C ds = -3\sqrt{2} \text{length}(C) = -3$$

示例2

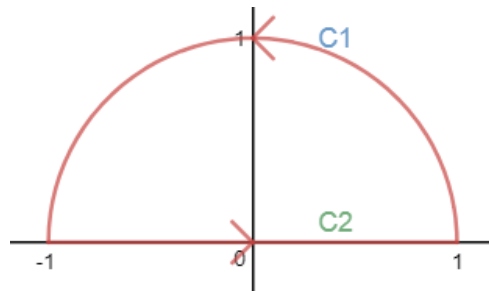
计算向量场 $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$ 中 C 的通量, C 由单位半圆和 x 轴上的线段围成, 如下图所示:



方法1: 使用格林公式

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_R (M_x + N_y) dA = 2 \iint_R dA = 2 \frac{\text{Area}(\text{unit circle})}{2} = \pi$$

方法2: 使用线积分



$$\text{in } C_1, \quad x = \cos t, y = \sin t, \quad 0 < t < \pi$$

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt$$

$$x dy - y dx = \cos^2 t dt + \sin^2 t dt = dt$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_{C_1} x dy - y dx = \int_0^\pi dt = \pi$$

$$\text{in } C_2, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y = 0, dy = 0$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_{C_2} \langle x, y \rangle \cdot \langle dy, -dx \rangle = \int_{C_2} \langle x, 0 \rangle \cdot \langle 0, -dx \rangle = 0$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \hat{n} ds + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \pi$$

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 多变量微积分

标签: 通量, 散度, 格林公式

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [概率笔记3——几何概型](#)

» 下一篇: [概率笔记4——重要公式](#)

posted on 2018-05-03 18:48 我是8位的 阅读(6503) 评论(2) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS_文档在线
预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等, 特定格式的合作, 支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
- Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜

» 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes